CH4、生成函數

生成函數

目錄：

4.1 一般生成函數

定義：

$a_0, \ldots, a_n, \ldots$：數列

定義 $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_0 a_nx^n$

稱為 a_n 之 Generating Function(GF)

公式：

1. $(1+x)^n = \sum_0 C_r^n x^r$
2. $1 + x + x^2 + \ldots = 1/(1-x) = \sum_0 x^n$
3. $1+x+x^2+\ldots+x^n = (1+x+x^2+\ldots) - (x^{n+1}+x^{n+2}+\ldots) = 1/(1-x) - x^{n+1}/(1-x)$

$1+x^3+x^6+x^9 = (1-x^{12})/(1-x^3)$

例(94 清大)：$a_n = 2^n+3^n$, n=0, 1, …，求 a_n 之 Generating Function：A(x)？

$A(x) = \sum_0 a_nx^n = \sum_0 (2^n+3^n) = \sum_0 (2x)^n + \sum_0 (3x)^n = 1/(1-2x) + 1/(1-3x) = (2-5x)/[(1-2x)(1-3x)]$

$= 1/(1-2x) + 1/(1-3x)$

例(99 台大)：求 0, 1, 2, …之 Generating Function：A(x)？

$a^n = n, A(x) = \sum_0 nx^n$

$1/(1-x) = \sum_0 x^n \Longrightarrow [1/(1-x)]' = \sum 0\, (x^n)' = \sum 1\, nx^{n-1} - 0$

$\Longrightarrow A(x) = x[1/(1-x)]' = x[1/(1-x)^2] = x/(1-x)^2$

例：

1. $C_0^n + C_1^n + \ldots C_n^n =$ ？
2. $2^0C_0^n + 2^1C_1^n + \ldots + 2^nC_n^n =$ ？
3. $1C_1^n + 2C_2^n + \ldots + nC_n^n =$ ？
4. $1^2C_1^n + 2^2C_2^n + \ldots + n^2C_n^n =$ ？

1. 2^n

2. 3^n

3. 微分：$n(1+x)^{n-1} = \sum_1 rC_r^nx^{r-1} = n2^{n-1}$

4. 微分、乘、微分：$nx(1+x)^{n-1} = \sum_1 rC_r^nx^r$

微分：$n(1+x)^{n-1} + nx(x-1)(1+x)^{n-2} = \sum_1 r2C_r^nx^{r-1}$

$\Longrightarrow n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$

Note：

$C_r^n = n!/[r!(n-1)!] = n(n-1)\ldots(n-r+1) / r!$，代數定義 $n \in \mathbb{R}$

1. $C_r^{-n} = (-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1) / r! = (-1)^r n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1) / r! = (-1)^r C_r^{n+r-1}$
2. $(1+x)^{-n} = \sum_0 (-1)^rC_r^{n+r-1}(-x)^r = \sum_0 (-1)^r C_r^{n+r-1}x^r$
3. $(1-x)^{-n} = \sum_0 (-1)C_r^{n+r-1}(-x)^r = \sum_0 C_r^{n+r-1}x^r$ (最重要)

例(98 中山)：$C_8^{-5} + C_5^{-7} =$ ？

$(-1)^8C_8^{5+8-1} + (-1)^5C_5^{5+7-1}$

例(99 中山)：$(x^6+x^7+x^8+\ldots)^{10}$，求 x^{72} 之係數為何？

$x^{60}(1+x+x^2+\ldots)^{10} = x^{60}[1/(1-x)]^{10} = x^{60} \sum_0 C_r^{10+r-1}x^r$
$\Longrightarrow r=12 \Longrightarrow C_{12}^{10+12-1} = C_{12}^{21}$

例(98 輔大)：$A(x) = (x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17})^{10}$，求 x^{80} 之係數為何？

$x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10} = x^{50}[(1-x^{15})/(1-x^3)]^{10} = x^{50}(1-x^{15})^{10}(1-x^3)^{-10}$
$x^{50}(1 - 10x^{15} + 45x^{30} + \ldots)[\sum_0 C_r^{10+r-1}(x^3)^r]$
$C_{10}^{10+10-1} + (-10)C_5^{10+5-1} + 45C_0^{10+0-1}$

球數

ax^e + : or
· : and

方法 球

$(1x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 1x^3)(1x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 1x^3)$
$= 1+ 2x +3x^2 + 4x^3 + \ldots$

例：r 個相同球，放到 n 個相異箱子，允許空箱

箱子 1 之 Generating Function：$1+x+x^2+\ldots$
總共：$A(x) = (1+x+x^2+\ldots)^n$

相當於 $B(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^n$ 中，x^r 之係數
$B(x) = [1/(1-x)]^n = \sum_0 C_r^{n+r-1}x^r \Longrightarrow C_r^{n+r-1}$

Note：
已改成不允許空箱

箱子 1 之 Generating Function：$x+x^2+\ldots+x^r$
$B(x) = (x+x^2+\ldots+x^r)^n$，求 x^r 的係數？

$[x/(1-x)]^n = x^n[1/(1-x)]^n = x^n \sum_0 C_i^{n+i-1}x^i$
$= C_{r-n}^{n+r-n-1} = C_{r-n}^{r-1}$

口訣：
⟹放：考慮箱子
⟹拿：考慮物品

例：n 件相異物，不允許重複，取 r 件物品之 Generating Function 為何？

物品 1 之 Generating Function：$1+x$
$\Longrightarrow A(x) = (1+x)^n$，求 x^r 之係數
$A(x) = (1+x)^n = \sum_0 C_r^n x^r$, Ans $= C_r^n$

例(99 台大)：$x^1+x^2+x^3+x^4 = 24$, $3\leq x^i\leq 8$, $\forall$ i，求整數解個數？

$(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4$，求 x^{24} 之係數
$= x^{12}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 = x^{12}[(1-x^6)/(1-x)] = x^{12}(1-x^6)^4(1-x)^4$
$= x^{12}(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24}) = \sum_0 C_r^{4+r-1}x^r$
$= C_{12}^{4+12-1} - 4C_6^{4+6-1} + 6$

例(98 成大)：一個 Die 丟 12 次，點數合為 24 的機率為何？

$x_1+\ldots+x_{12} = 24$, $1\leq x_i\leq 6$
$A(x) = (x+x^2+\ldots+x^6)^{12}$，求 x^{24} 之係數

例：$x_1+2x_2+3x_3=20$, $x_i\geq 0$

$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+\ldots)$，求 x^{20} 之係數
$A(x) = (1/(1-x)) \times (1/(1-x^2)) \times (1/(1-x^3))$

例(97 中央)：n 元紙鈔換成 1, 5, 10, 20 銅板之方法為 a^n，求 a^n 之 Generating Function？

$x_1+5x_2+10x_3+20x_4 = n$, $x_i\geq 0$
$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x^{10}+x^{20}+\ldots)(1+x^{20}+x^{40}+\ldots)$
$\Longrightarrow A(x) = 1/(1-x) \times 1/(1-x^5) \times 1/(1-x^{10}) \times 1/(1-x^{20})$

例：{1, …, 50}中，取 7 個不連續整數，有幾種方法？

$1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$\Longrightarrow x_1+x_2+\ldots+x_8 = 50-1 = 49$
$x_1, x_8\geq 0$, $x_2, \ldots, x_7\geq 2$
$A(x) = (1+x+\ldots)^2 \times (x^2+x^3+\ldots)^6$，求 x^{49} 之係數

4.2 整數分割

Note：

令 p_n 表示 n 個整數分割數，$p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=4, \dots$，令 $p_0=1$，p_n 相當於 n 個相同球，放至 n 個相同箱子，允許空箱的方法

令 $P(x) = \sum_0 P_n x^n$

1 出現的次數之生成函數： $1+x+x^2+\dots = 1/(1-x)$

2 出現的次數之生成函數： $1+x^2+x^4+\dots = 1/(1-x^2)$

3 出現的次數之生成函數： $1+x^3+x^6+\dots = 1/(1-x^3)$

4 出現的次數之生成函數： $1+x^4+x^8+\dots = 1/(1-x^4)$

則 $1/(1-x) \times 1/(1-x^2) \times 1/(1-x^3) \times \dots$ 中，x^r 的係數，即 P_r, $1 \le r \le n$

1. 奇數分割之 Generating Function：$P_{odd}(x) = 1/(1-x) \times 1/(1-x^3) \times 1/(1-x^5) \times \dots$
2. 偶數分割之 Generating Function：$P_{even}(x) = 1/(1-x^2) \times 1/(1-x^4) \times 1/(1-x^6) \times \dots$

例：$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，證 n 的奇數分割數 = n 的相異分割數

令 a^n 表示 n 之奇數分割數 $P_{odd}(x) = \sum_0 a^n x^n$

令 b^n 表示 n 之偶數分割數 $P_{even}(x) = \sum_0 b_n x^n$

$\Leftrightarrow P_{even}(x) = P_d(x)$

$P_d(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$

$= [(1-x^2)/(1-x)]\times[(1-x^4)/(1-x^2)]\times[(1-x^6)/(1-x^3)]\times\dots = 1/(1-x) \times 1/(1-x^3) \times 1/(1-x^5) \times \dots = P_{odd}(x)$

例：$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，證：N 之 R 堆分割數 = 最大為 R 之分割數

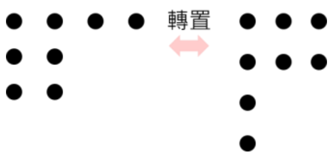
r=2：

4 = 3+1 = 2+2

4 = 2+2 = 2+1+1

利用 Ferrer Graph

8 = 4+2+2, 8 = 3+3+1+1



4.3 指數生成函數

定義：

a_n 為一數列，定義 $A(x) = \sum_0 a_n x^n/n!$，稱為 a_n 之 Exponential Generating Function，簡稱 EGF

公式：
1. $e^x = \sum_0 x^i/i! = 1 + x/1! + x^2/2! + \ldots$
2. $e^{-x} = \sum_0 x^i/i! = 1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + \ldots$
3. $1 + x^2/2! + x^4/4! + \ldots = (e^x+e^{-x})/2$
4. $x/1! + x^3/3! + x^5/5! + \ldots = (e^x-e^{-x})/2$

口訣：
拿：考慮物品
1. 組合：Generating Function
2. 排列：Exponential Generating Function
放：考慮箱子
1. 相同球：Generating Function
2. 相異物：Exponential Generating Function

例：n 件相異物允許重複取 r 件排列

物品 1~n 之 EGF：$1 + x/1! + x^2/2! + \ldots$

$A(x) = (e^x)^n$，求 $x^r/r!$之係數，$A(x) = e^{nx} = \sum_0 (n^x)^r/r! = \sum_0 n^r(x^r/r!)$

例：m 個相異物，放到 n 個相異箱子，不允許空箱？

箱子 1~n 的 EGF：$x/1! + x^2/2! + \ldots = e^x-1$

$A(x) = (e^x-1)^n$，求 $x^m/m!$之係數

$A(x) = (-1+e^x)^n = \sum_0 C_i^n(-1)^i(e^x)^{n-i} = \sum_0 (-1)^i C_i^n \sum_0 [(n-i)x]^m/m!$

$= \sum_0 [\sum_0 (-1)^i C_i^n(n-i)^m]\, x^m/m!$ //onto(m, n)

例(10 個)：四元 n 序列中

1. 含偶數個 0 的序列數為何？
2. 含偶數個 0、偶數個 1 的序列數為何？
3. 含 0, 1 個數和為偶數的序列數為何？

1. 0 出現次數之 EGF：$1+x^2/2!+x^4/4!+\ldots = (e^x+e^{-x})/2$

1~3 出現次數之 EGF：$1+x/1!+x^2/2!+\ldots = e^x$

$\Longrightarrow (e^x+e^{-x})/2 \times e^x \times e^x \times e^x$，求 $x^n/n!$之係數

$A(x) = 1/2(e^{4x}+e^{2x}) = 1/2[\sum_0 (4x)^n/n! + \sum_0 (2x)^n/n!\,] = 1/2 \sum_0 (4^n+2^n)x^n/n!$

2. $[(e^x+e^{-x})/2]^2 \times e^x \times e^x$，求 $x^n/n!$之係數

3. $[(e^x+e^{-x})/2]2 \times e^x \times e^x + [(e^x-e^{-x})/2]^2 \times e^x \times e^x$，求 $x^n/n!$之係數

例(99 東吳)：ENGLINE 中取 4 個字母排列有幾個？

$A(x) = (1+x/1!+x^2/2!)(1+x/1!)^2$，求 $x^4/4!$之係數

$A(x) = (1+2x+2x^2+x^3+1/4x^4)(1+2x+x^2)$，$x^4/4!$之係數 $= 2+2+1/4 = 17/4$；$x^4/4!$之係數$=17/4 \times 24 = 102$

4.4 求和算子

Note：

$A(x) = \sum_0 a_n x^n = a_0+a_1x+\ldots$

$1/(1-x)\ A(x) = (1+x+x^2+\ldots)(a_0+a_1x+\ldots) = a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + \ldots$

令 $Sn = a_0+a_1+\ldots+a_n$ 為 a_n 之 Partial Sum

則 $1/(1-x)\ A(x) = S(x)$為 S_n 之 Generating Function

$a_n =$ 1 1 1… → $A(x) = 1/(1-x)$，稱 $1/(1-x)$為 Sum Operator(求和算子)

$S_n =$ 1 2 3… → $S(x) = 1/(1-x)^2$

1 3 6… → $S(x) = 1/(1-x)^3$

例(7 個)：求 3*2*1 + 4*3*2 + … + (n+1)n(n-1) = ?

$A(x) = \sum_0 a_n x^n = \sum_0 (n+1)n(n-1)x^n$

$1/(1-x) = \sum_0 x^n \Longrightarrow x/(1-x) = \sum_0 x^{n+1}$

$\Longrightarrow 6/(1-x)^4 = \sum_2 (n+1)n(n-1)x^{n-2} \Longrightarrow 6x^2/(1-x)^4 = \sum_2 (n+1)n(n-1)x^n$

∴Sn 的 Generating Function：$S(x) = 1/(1-x) \times A(x) = 1/(1-x) \times 6x^2/(1-x)^4$

$S(x) = 6x^2/(1-x)^5$